

Exercice N°1

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

- 1- $\sin(5\pi - x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
- 2- $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - x) + \cos(3\pi - x) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice N°2

- 1- Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\operatorname{tg} x = 2$ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- 2- Calculer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ sachant que $\sin x = \frac{-1}{4}$ et $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice N°3

Démontrer les résultats suivants

- 1- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$
- 2- $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$
- 3- $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$
- 4- $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$
- 5- $(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)(\operatorname{cot} x + \operatorname{cot} y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$

Exercice N°4

- 1- a- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$
b- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- 2- Montrer que pour tout x réel on a :
a- $2(1 - \cos 2x) - \sin^2 2x = 4\sin^4 x$
b- $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos 2x$
- 3- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Exercice N°5

Simplifier les expressions suivantes

- 1- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 - 2$
- 2- $\cos^4 x - \sin^4 x$
- 3- $\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \operatorname{cot}^2 x \operatorname{cot}^2 y$
- 4- $\cos^6 x + \sin^6 x$
- 5- $\frac{\sin 2x}{\sin x} \frac{\cos 2x}{\cos x}$

Exercice N°6

- 1- Montrer que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
- 2- Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$
- 3- Sachant que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$



4- Montrer que $\text{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \text{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

Exercice N°7

1- Exprimer à l'aide de $\sin 2x$ et $\cos 2x$
 $A = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x$

2- Montrer que pour tout x réel tel que $\sin x \neq -1$ on a : $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

Exercice N°8

1- Calculer $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$; $B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

2- Montrer les égalités suivantes

a) $4 \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin 3x$

b) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \text{tg} 3x \text{tg} x$

Exercice N°9

Soient $S = \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$ et $S' = \cos \left(\frac{3\pi}{5} \right) \cos \left(\frac{\pi}{5} \right)$

1- Calculer $2S \sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$ en déduire les valeurs de S et S'

2- Montrer que $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) = -\frac{1}{4}$ déduire la valeur de $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$

Exercice N°10

1- Soient $P_1 = \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ et $Q_1 = \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{5} \right)$

Calculer $P_1 Q_1$ et en déduire la valeur de P_1

2- Soient $P_2 = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right)$ et $Q_2 = \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{7} \right)$

Calculer $P_2 Q_2$ en déduire la valeur de P_2

Exercice N°11

1- Montrer que pour $a \in \mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ on a : $\frac{1}{\sin 2a} = \cot ga - \cot g2a$

2- En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a}$$

Exercice N°12

1- Montrer que pour tout x réel on a : $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

2- Déduire alors que : $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{18} \right)$

3- Déduire donc $\frac{1}{\sin \frac{5\pi}{18}} + \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{5\pi}{18}} = 4$

4- Soit $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$

a) Vérifier que $f(x) = 2 \cos^2 x + 2 \sqrt{3} \cos x \sin x$

b) Montrer alors que $f(x) = 4 \cos x \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

c) Calculer de deux manières $f \left(\frac{\pi}{12} \right)$. Déduire alors $\cos \frac{\pi}{12}$

5- Pour $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[- \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$ on considère $g(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}$



a) Montrer que $g(x) = \frac{\cos x}{2\sin(x + \frac{\pi}{6})}$

b) Calculer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$. Déduire que $\cotg(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$

Exercice N°13

I°- Soit x un réel tel que $\cos x + \sin x \neq 0$ et $\cos 2x \neq 0$

1- Montrer que : $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$

2- Sans calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. Déduire que $\tg \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

3- Transformer alors en $r \cos(x - \theta)$ l'expression $\cos x + (2 - \sqrt{3}) \sin x$

II°- 1- Pour tout x réel montrer que $4 \sin x \cos x \cos 2x = \sin 4x$

2- Déduire alors que $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

3- A l'aide de 2- Montrer que $\cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

4- Déduire que $-\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

5- Calculer alors les valeurs de : $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$

Exercice N°14

Soit la fonction h définie par : $h x \mapsto 4 \cos^2 x + \sin 4x$

1- Montrer que pour tout x réel on a : $\cos^2(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

2- En déduire que pour tout x réel on a : $h(\frac{\pi}{4} - x) = 2 \sin 2x + \sin 4x + 2$

3- Calculer $f(\frac{\pi}{12})$ et $f(\frac{\pi}{8})$

4- a) En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ puis $\sin \frac{\pi}{8}$

b) Montrer que $\tg \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

